APLICAÇÕES DA DIFERENCIAÇÃO

O Teorema do Valor Extremo

Preceptora:	Isadora Honório Guimarães
Coordenadora:	Patrícia Hilário Tacuri Córdova

O Teorema do Valor Extremo: *Se f for contínua em um intervalo $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em $[a, b]$.*

O Método do Intervalo Fechado: *Para encontar os valores máximos e mínimos absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:*

I) Encontre os valores de f nos números críticos de f em $[a, b]$.

II) Encontre os valores de f nos extremos do intervalo.

III) O maior valor das etapas I e II é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplo 1: Calcule o valor máximo e mínimo absoluto de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ no intervalo $[0, 2]$:

I) Seguindo os passos do método descrito acima, será encontrado os pontos críticos da função (pontos onde a derivada resulta em zero ou pontos em que ela não exista):

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \\
f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \\
f'(x) &= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \\
f'(x) &= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Agora, para $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x^2-1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$ ou $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

E como a derivada existe para toda reta, os únicos pontos críticos são em $x = 1$ e $x = -1$, então:

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ f(-1) &= \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

II) Será calculado neste passo, os valor da função em seus extremos:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{0}{0^2+1} = 0 \\ f(2) &= \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{4+1} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

III) Agora, basta verificar qual dos valores é maior e qual é menor, que serão, respectivamente, o máximo e mínimo absoluto:

Máximo absoluto $= \dfrac{1}{2} = f(1)$

Mínimo absoluto $= -\dfrac{1}{2} = f(-1)$

Exemplo 2: Calcule o valor máximo e mínimo absoluto da função $f(x) = \dfrac{e^{(x^2-2x)}}{2x}$, no intervalo $[1, 3]$:

I)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{(x^2-2x)} \cdot (2x-2) \cdot 2x - e^{(x^2-2x)} \cdot 2}{(2x)^2} \Rightarrow \\ f'(x) &= \frac{2e^{(x^2-2x)} \cdot [x(2x-2)-1]}{4x^2} \Rightarrow \\ f'(x) &= \frac{e^{(x^2-2x)} \cdot (2x^2-2x-1)}{2x^2} \end{aligned}$$

Agora, será calculado os pontos críticos da derivada de $f(x)$. Estes pontos serão onde $f'(x) = 0$ ou onde $f'(x)$ não existe:

Uma fração não existe quando seu denominador é igual a zero, entao $2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, porém $x = 0$ não está no intervalo dado, e nem faz parte do domínio da função dada, por isso, $x = 0$ não é considerado um ponto crítico. Logo, basta verificar quando $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{(x^2-2x)} \cdot (2x^2-2x-1)}{2x^2} &= 0 \Rightarrow \\ e^{(x^2-2x)} \cdot (2x^2-2x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Já que é um produto resultando em zero, então: $e^{(x^2-2x)} = 0$ ou $2x^2 - 2x - 1 = 0$, como para $e^{(x^2-2x)} = 0, \nexists\ x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade, pois a função exponencial é sempre positiva, os pontos críticos serão onde $2x^2 - 2x - 1 = 0$:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 2x - 1 &= 0 \Rightarrow \\
x &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \\
x &= \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} \Rightarrow \\
x &= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} \Rightarrow \\
x &= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, os pontos críticos são $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1,36$ e $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \approx -0,36$, logo:

$$\begin{aligned}
f(1,36) &= \frac{e^{(1,36)^2 - 2 \cdot 1,36}}{2 \cdot 1,36} = \frac{e^{-0,08}}{2,72} \approx 0,33 \\
f(-0,36) &= \frac{e^{(-0,36)^2 - 2 \cdot (-0,36)}}{2 \cdot (-0,36)} = \frac{e^{0,84}}{-0,72} \approx -3,21
\end{aligned}$$

II) Calculando o valor da função nos extremos dados, obtém-se:

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{e^{(1^2 - 2 \cdot 1)}}{2} = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e} \approx 0,18 \\
f(3) &= \frac{e^{3^2 - 2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{e^{9-6}}{6} = \frac{e^3}{6} \approx 3,34
\end{aligned}$$

III) Por fim, conclui-se o valor máximo e mínimo absoluto:

Máximo absoluto $= \dfrac{e^3}{6} \approx 3,34 = f(3)$

Mínimo absoluto $= \dfrac{e^{0,84}}{-0,72} \approx -3,21 = f(-0,36)$

Referências

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1*. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.

[2] STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1. Editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.