APLICAÇÕES DA DIFERENCIAÇÃO

Diferenciação Logarítmica

Preceptora:	Isadora Honório Guimarães
Coordenadora:	Patrícia Hilário Tacuri Córdova

Passo a passo e o porquê usar a diferenciação logarítmica:

Quando há funções complicadas envolvendo quocientes, produtos e potências, aplicar o ln *de ambos os lados, utilizar as propriedades de logarítmo e diferenciar implicitamente ambos os lados em relação a x, facilita a derivação das mesmas.*

Exemplo 1: Diferencie $y = \dfrac{(2x+1)^8(x^4-3)^5}{x^3-5x^2+9x+1}$:

Seguindo os passos desta técnica, será aplicado em ambos os lados da iguadalde o ln:

$$\ln y = \ln\left[\frac{(2x+1)^8(x^4-3)^5}{x^3-5x^2+9x+1}\right]$$

Usando a seguinte propriedade de logarítmo: $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$:

$$\ln y = \ln(2x+1)^8(x^4-3)^5 - \ln(x^3-5x^2+9x+1)$$

Agora, usando $\ln(x.y) = \ln x + \ln y$:

$$\ln y = \ln(2x+1)^8 + \ln(x^4-3)^5 - \ln(x^3-5x^2+9x+1)$$

Fazendo o uso que $\ln x^a = a \cdot \ln x$:

$$\ln y = 8\ln(2x+1) + 5\ln(x^4-3) - \ln(x^3-5x^2+9x+1)$$

Diferenciando implicitamente em relação a x:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y}y' &= 8\left(\frac{2}{2x+1}\right)+5\left(\frac{4x^3}{x^4-3}\right)-\frac{3x^2-10x+9}{x^3-5x^2+9x+1} \Rightarrow \\
\frac{1}{y}y' &= \frac{16}{2x+1}+\frac{20x^3}{x^4-3}-\frac{3x^2-10x+9}{x^3-5x^2+9x+1} \Rightarrow \\
y' &= \frac{\dfrac{16}{2x+1}+\dfrac{20x^3}{x^4-3}-\dfrac{3x^2-10x+9}{x^3-5x^2+9x+1}}{\dfrac{1}{y}} \Rightarrow \\
y' &= \left[\frac{16}{2x+1}+\frac{20x^3}{x^4-3}-\frac{3x^2-10x+9}{x^3-5x^2+9x+1}\right]\cdot y \Rightarrow \\
y' &= \left[\frac{16}{2x+1}+\frac{20x^3}{x^4-3}-\frac{3x^2-10x+9}{x^3-5x^2+9x+1}\right]\cdot\frac{(2x+1)^8(x^4-3)^5}{x^3-5x^2+9x+1} \Rightarrow \\
y' &= \frac{16(2x+1)^7(x^4-3)^5+20x^3(x^4-3)^4(2x+1)^8}{x^3-5x^2+9x+1}-\frac{(3x^2-10x+9)(2x+1)^8(x^4-3)^5}{(x^3-5x^2+9x+1)^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2: Diferencie $y=\sqrt{x}e^{x^2}(x^2+1)^{10}$:

Seguindo os passos desta técnica, será aplicado em ambos os lados da iguadalde o ln:

$$\ln y = \ln\sqrt{x}e^{x^2}(x^2+1)^{10}$$

Usando a propriedade que diz $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \ln\sqrt{x}+\ln e^{x^2}+\ln(x^2+1)^{10} \Rightarrow \\
\ln y &= \ln x^{\frac{1}{2}}+\ln e^{x^2}+\ln(x^2+1)^{10}
\end{aligned}
$$

Fazendo o uso de que $\ln a^b = b\ln a$, resulta em:

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \frac{1}{2}\ln x+x^2\ln e+10\ln(x^2+1) \Rightarrow \\
\ln y &= \frac{1}{2}\ln x+x^2\cdot 1+10\ln(x^2+1) \Rightarrow \\
\ln y &= \frac{1}{2}\ln x+x^2+10\ln(x^2+1)
\end{aligned}
$$

Diferenciando implicitamente em relação a x:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}y' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+2x+10\cdot\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow \\
\frac{1}{y}y' &= \frac{1}{2x}+2x+\frac{20x}{x^2+1} \Rightarrow \\
\frac{1}{y}y' &= \frac{x^2+1+2x[2x(x^2+1)]+20x\cdot 2x}{2x(x^2+1)} \Rightarrow \\
\frac{1}{y}y' &= \frac{x^2+1+4x^2(x^2+1)+40x^2}{2x(x^2+1)} \Rightarrow \\
\frac{1}{y}y' &= \frac{x^2+1+4x^4+4x^2+40x^2}{2x(x^2+1)} \Rightarrow \\
\frac{1}{y}y' &= \frac{4x^4+45x^2+1}{2x(x^2+1)} \Rightarrow \\
y' &= \frac{\dfrac{4x^4+45x^2+1}{2x(x^2+1)}}{\dfrac{1}{y}} \Rightarrow \\
y' &= \frac{4x^4+45x^2+1}{2x(x^2+1)}\cdot y \Rightarrow \\
y' &= \frac{4x^4+45x^2+1}{2x(x^2+1)}\cdot\sqrt{x}e^{x^2}(x^2+1)^{10} \Rightarrow \\
y' &= \sqrt{x}e^{x^2}(x^2+1)^9\frac{4x^4+45x^2+1}{2x}
\end{aligned}$$

Exemplo 3: Diferencie $y = x^{\operatorname{sen} x}(\ln x)^x$

Seguindo o passo a passo, tem-se:

$$\ln y = \ln x^{\operatorname{sen} x}(\ln x)^x$$

Fazendo uso das seguintes propriedades: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ e $\ln a^b = b\ln a$

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x^{\operatorname{sen} x} + \ln(\ln x)^x \Rightarrow \\
\ln y &= \operatorname{sen} x \ln x + x\ln(\ln x) \Rightarrow
\end{aligned}$$

Diferenciando implicitamente em relação a x:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}y' &= \cos x \cdot \ln x + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(\ln x) + x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \Rightarrow \\
\frac{1}{y}y' &= \cos x \cdot \ln x + \frac{senx}{x} + \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \Rightarrow \\
y' &= \frac{cosx \cdot \ln x + \frac{senx}{x} + \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{y}} \Rightarrow \\
y' &= \left[cosx \cdot \ln x + \frac{senx}{x} + \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right] \cdot y \Rightarrow \\
y' &= \left[cosx \cdot \ln x + \frac{senx}{x} + \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right] \cdot x^{\operatorname{sen} x}(\ln x)^x
\end{aligned}$$

Referências

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1*. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.

[2] STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1. Editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.