APLICAÇÕES DE INTEGRAÇÃO

Áreas entre as Curvas

Preceptora:	Isadora Honório Guimarães
Coordenadora:	Patrícia Hilário Tacuri Córdova

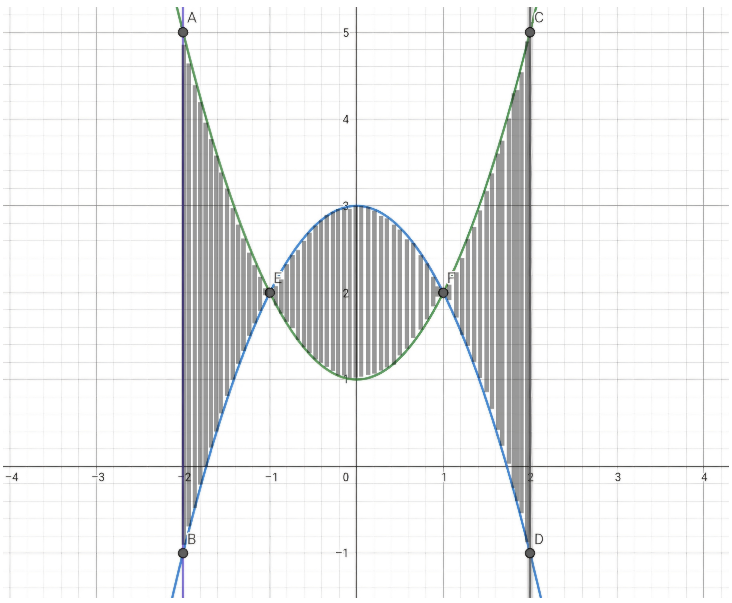
Como usar:

A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, e as retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$ é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Exemplo 1: Calcule a área entre as seguintes curvas e retas: $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x^2$, $x = -2$, $x = 2$:

Primeiramente, esboçando todas essa funções em uma plano cartesiano, temos:



Através da figura, vemos que devemos calcular a área da parte cinzenta, para isso temos que analisar onde $x^2 + 1 \geq 3 - x^2$. Em $x = -2$ até $x = -1$ e $x = 1$ até $x = 2$, a função

$x^2+1 \geq 3-x^2$. E de $x=-1$ até $x=1$ a função $3-x^2 \geq x^2+1$. Então, podemos expressar a área como:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{-1} [x^2+1-(3-x^2)]\ dx + \int_{-1}^{1} [3-x^2-(x^2+1)]\ dx + \int_{1}^{2} [x^2+1-(3-x^2)]\ dx \\
&= \int_{-2}^{-1} (2x^2-2)\ dx + \int_{-1}^{1} (-2x^2+2)\ dx + \int_{1}^{2} (2x^2-2)\ dx \\
&= \left(\frac{2}{3}x^3-2x\right)\Bigg]_{-2}^{-1} + \left(-\frac{2}{3}x^3+2x\right)\Bigg]_{-1}^{1} + \left(\frac{2}{3}x^3-2x\right)\Bigg]_{1}^{2} \\
&= -\frac{2}{3}+2-\left(-\frac{16}{3}+4\right)-\frac{2}{3}+2-\left(\frac{2}{3}-2\right)+\frac{16}{3}-4-\frac{2}{3}+2 \\
&= -\frac{2}{3}+\frac{6}{3}+\frac{16}{3}-\frac{12}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{6}{3}+\frac{16}{3}-\frac{2}{3} \\
&= -\frac{20}{3}+\frac{44}{3}=\frac{24}{3}=8
\end{aligned}$$

Exemplo 2: Calcule a área entre as curvas $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$:

Primeiramente, vamos calcular onde esses gráficos se intersectam:

$$x^2=\sqrt{x} \Rightarrow$$

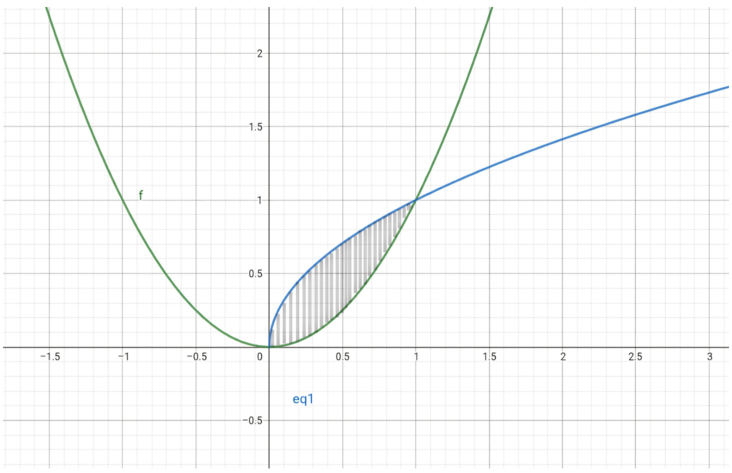
$$x^4=x \Rightarrow$$

$$x^4-x=0 \Rightarrow$$

$$x(x^3-1)=0 \Rightarrow$$

$$x=0 \text{ ou } x^3-1=0 \Rightarrow x=1$$

Agora, basta verificarmos qual função é maior neste intervalo, então vamos analisar os gráficos das funções num mesmo plano cartesiano:

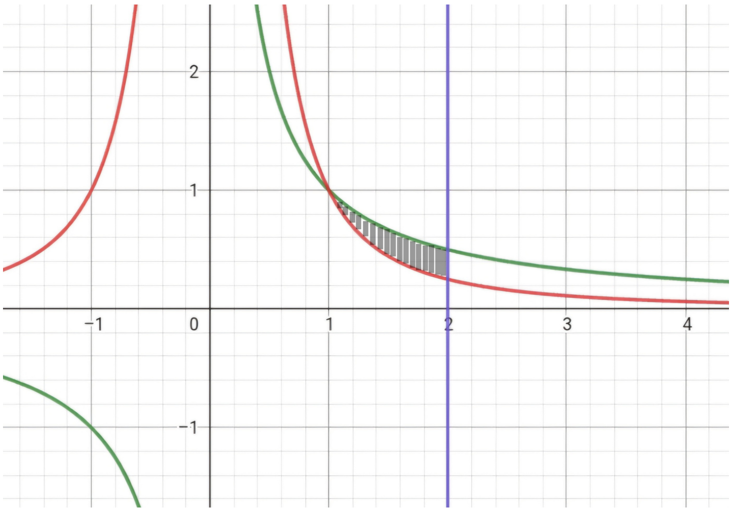


Através da imagem acima, é perceptível que no intervalo de 0 até 1, a função $\sqrt{x} \geq x^2$, então podemos expressar a área que está pintada em cinza da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\ dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)\ dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3}\cdot 0 - \frac{0}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 3: Calcule a área entre as curvas: $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^2}$ e $x = 2$:

Primeiramente vamos analisar todas essas curvas num mesmo plano cartesiano:

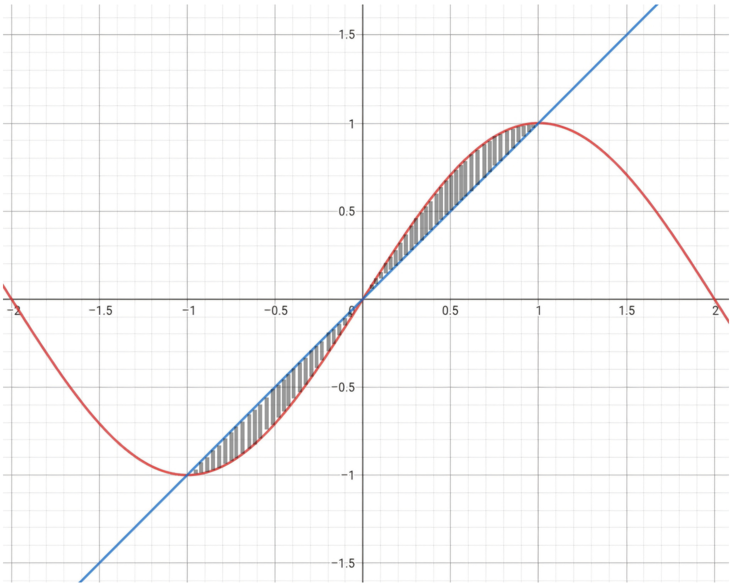


Através da imagem, é perceptível que a curva, no intervalo de $x = 1$ até $x = 2$, $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{x^2}$, então a área da parte cinzenta pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\ dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - x^{-2}\right)\ dx \\ &= \left(\ln x - \frac{x^{-1}}{(-1)}\right)\Bigg]_1^2 = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\Bigg]_1^2 \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2} - \left(\ln 1 + \frac{1}{1}\right) = \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln 1 - 1 \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 4: Calcule a área entre as curvas: $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ e $y = x$:

Primeiro, vamos analisar as curvas num mesmo plano cartesiano:



É perceptível que as curvas se interceptam em $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. No intervalo de $[-1, 0]$ a função $y = x$ é maior que $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. E de $[0, 1]$ a função $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ é maior que $y = x$. Então podemos expressar a área da parte cinzenta como:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\, dx + \int_{0}^{1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x\, dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\Bigg]_{-1}^{0} + \left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg]_{0}^{1} \\
&= \frac{0}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{0}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{0}{2}\right) - \frac{0}{2}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\cos 0 - \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos 0 \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\cdot 0 - \frac{2}{\pi}\cdot 0 - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cdot 1 \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \\
&= \frac{4}{\pi} - 1 \\
&= \frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} \\
&= \frac{4 - \pi}{\pi}
\end{aligned}
$$

Referências

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1*. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.

[2] STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1. Editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.