Séries de Potências

Para inteiros $m \leq n$ e reais $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ escrevemos a soma $\sum_{i=m}^{n} a_i$.

Teorema 1.0.1 *Seja c uma constante (não dependendo de i), então:*
a) $\sum_{i=m}^{n} c a_i = c \left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right)$ *b)* $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right) + \left(\sum_{i=m}^{n} b_i \right)$
c) $\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right) - \left(\sum_{i=m}^{n} b_i \right)$.

Observação 1.0.2 *O teorema acima não vale quando a soma é infinita (série). Neste caso é preciso estudar a convergência das séries.*

A convergência de séries numéricas é uma questão delicada. Por exemplo, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ não converge (sua soma é infinita). Já a série $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n$ também diverge, mas por outra razão: ela não tende para valor algum.

> restart:

Veja 6 somas e os seus resultados.

> Sum(1, i=1..n), Sum(c, i=1..n), Sum(i, i=1..n), Sum(i^2, i=1..n), Sum(i^3, i=1..n), Sum(i^4, i=1..n)];

$$\left[\sum_{i=1}^{n} 1, \sum_{i=1}^{n} c, \sum_{i=1}^{n} i, \sum_{i=1}^{n} i^2, \sum_{i=1}^{n} i^3, \sum_{i=1}^{n} i^4 \right].$$

> factor(simplify(value("")));

$$\left[n, nc, \frac{1}{2} n(n+1), \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2, \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right) \right]$$

> Sum(1/(i+1), i=1..6) =\`1\`/\`2\`+ \`1\`/\`3\`+ \`1\`/\`4\`+ \`1\`/\`5\`+ \`1\`/\`6\`+ \`1\`/\`7\`;

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

> Sum(j^2, j=n..n+3): "= value(");

$$\sum_{j=n}^{n+3} j^2 = n^2 + (n+1)^2 + (2+n)^2 + (n+3)^2$$

Exercícios

1- Escreva na notação sigma:
a) $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$
b) $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} + \frac{7}{11} + \frac{8}{12}$.

2- Encontre o valor da soma:
> Sum(3^(j+1), j=1..6): "= value(");

3- Encontre o valor da soma
> Sum(4, i=1..100) = 4*Sum(1, i=1..100); lhs(") = value(rhs("));

$$\sum_{j=1}^{6} 3^{(j+1)} = 3276;$$

$$\sum_{i=1}^{100} 4 = 400.$$

4 - Encontre o valor da soma
> Sum(i^3 - i - 2, i=1..n):"= simplify(value("));

$$\sum_{i=1}^{n} \left(i^3 - i - 2\right) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{4}n^2 - \frac{5}{2}n.$$

5 - Soma telescópica
> Sum(1/i - 1/(i+1), i=3..99)= `(1/3 - 1/4) + (1/4 - 1/5) + (1/5 - 1/6)`+ `.`.`..`+ `(1/98 - 1/99) + (1/99 - 1/100)`;

$\sum_{i=3}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = (1/3 - 1/4) + (1/4 - 1/5) + (1/5-$
$1/6) + \ldots + (1/98 - 1/99) + (1/99 - 1/100)$

> Sum(1/i - 1/(i+1), i=3..99): "= value(");

$$i = 3^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{97}{300}$$

Via maple

> Sum(1/i - 1/(i+1), i=3..99): "= value(");

$$\sum_{i=3}^{99}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\frac{97}{300}$$

6 - Encontre o limite

> Sum(2/n * ((2*i/n)^3 + 5*(2*i/n)), i=1..n): "= expand(value("));

$$\sum_{i=1}^{n}\left(2\frac{8\frac{i^3}{n^3}+10\frac{i}{n}}{n}\right)=14+\frac{18}{n}+\frac{4}{n^2}$$

> map(Limit, ", n=infinity); Lim_limite:=value(rhs("));

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2\frac{8\frac{i^3}{n^3}+10\frac{i}{n}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}14+\frac{18}{n}+\frac{4}{n^2}=14$$

> unassign('a', 'i', 'r');

> Sum(a*r^(i-1), i=1..n): "= simplify(value("));

$$\sum_{i=1}^{n}ar^{(i-1)}=\frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

7 - Calcular na mão $\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{2^{(i-1)}}$.

8 - Escreva a soma de Riemann na notação sigma

> Sum(f(x[i])*Delta*x[i], i=1..n) = f(x[1])*Delta*x[1] + f(x[2])*Delta*x[2] + `.`.`..`+ f(x[n])*Delta*x[n];

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{f}\left(x_i\right)\Delta x_i=\mathrm{f}\left(x_1\right)\Delta x_1+\mathrm{f}\left(x_2\right)\Delta x_2+\ldots+\mathrm{f}\left(x_n\right)\Delta x_n$$

> Sum(3/2^(i-1), i=1..n): "= simplify(value("));

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{2^{(i-1)}}\right)=-62^{(-n)}+6$$

> equivalently:=6*(1-(1/2)^n);

$$equivalente:=6-6\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

9 - Soma dupla

```
> Sum(Sum(i+j, j=1..n), i=1..m): "= factor(simplify(value("")));
```

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right)=\frac{1}{2}nm(m+2+n)$$

Séries de Potências

Uma série de potências é uma expressão da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(x-x_0)\,n$$

Como exemplo simples, tomemos a seguinte série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Note que seus termos formam uma progressão geométrica. Assim, fica fácil determinar o valor da sua soma. Ou seja,

$$(*)\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$$

Esta série converge quando x pertence ao intervalo $[-1,1)$. Note que podemos usar esta série para determinar a soma de outras. Vejamos um exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^{(2n)}$$

Tomando $y=x^2$, e usando (*) obtemos que a série vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^{(2n)}=\frac{1}{1-y^2}$$

Note que a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ também pode ser calculada usando a igualdade (*) , para isto basta tomar $-x$ no lugar de x para obter

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathbf{e}^x$$

Vejamos algumas séries importantes;

> Sum((x^n)/(n!), n=0..infinity):"= simplify(value("));

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathbf{e}^x$$

> Sum((-x)^n, n=0..infinity):"= simplify(value("));

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{x+1}$$

> Sum((-1)^(n)*(x)^(2*n+1)/(2*n+1)!, n=0..infinity):"= simplify(value("));

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sin(x)$$

> Sum((-1)^(n)*(x)^(2*n)/(2*n)!, n=0..infinity):"= simplify(value("));
> Sum((-1)^(n+1)*(x)^(n)/(n), n=1..infinity):"= simplify(value("));

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} x^n}{n} = \ln(x+1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n)}}{(2n)!} = \cos(x)$$

Exemplo 1.0 .3 (Uma aproximação para π) *Para este exemplo vamos operar formalmente com as séries, não se preocupando com as convergências.*

Como $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(x)$ *e como* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{(n+1)} x^{(2n+2)} = \frac{1}{x^2+1}$, *então temos que*

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{2n+1}.$$

Para o caso particular de $x = 1$, *temos que* $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. *Assim, temos*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Convergência de séries de potência

No caso de séries numéricas alguns resultados são importantes e úteis para o estudo das séries de potências:

- **Teste de D'Alembert ou da razão :** seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica. Se

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

então a série numérica converge absolutamente.

- **Teste de Cauchy ou da raiz:** seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica. Se

$$L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\left(\frac{1}{n}\right)} < 1,$$

então a série numérica converge absolutamente.

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, pode acontecer um dos seguintes fatos:

1. a série converge absolutamente para todo x real.
2. a série converge apenas quando $x = 0$
3. existe um $R > 0$ tal que a série converge absolutamente se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$.

Ao número R chamamos de raio de convergência da série de potências. Em 1) o raio R é infinito. Em 2) o raio é $R = 0$.

Como determinar o raio de convergência?

Façamos um exemplo. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ tem termo genérico dado por

$$u_n = \frac{x^n}{n3^n}.$$

Calculemos o limite quando n tende ao infinito de $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. Neste caso o limite é $\frac{|x|}{3}$. Deve ser menor do que 1, para a série convergir (veja o teste da razão ou o teste da raiz). Isto ocorre desde que $|x| < 3$. Segue que $R = 3$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{(2n)!}$ tem raio de convergência $R = \infty$ (verifique isto!).

Há ainda outra forma de determinarmos o raio de convergência: Tomemos o limite, quando n tende ao infinito da raiz $n-$ésima do módulo do coeficiente do termo geral da série, L $= \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\left(\frac{1}{n}\right)}$, então o raio de convergência é $R = \dfrac{1}{L}$

No exemplo anterior devemos calcular o seguinte limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^n}{(2n)!} \right|^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

> restart:

> Limit(abs((-2)^n/((2*n)!))^(1/n),n=infinity):"= 2*limit(1/((2*n)!)^(1/n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^n}{(2n)!} \right|^{\left(\frac{1}{n}\right)} = 0$$

Segue que o raio de convergência da série é $R = \infty$.

Agora voltemos ao nosso primeiro exemplo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$

> Limit(abs(1/(n*3^n))^(1/n),n=infinity):"= (1/3)*limit(1/(n)^(1/n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n3^n} \right|^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{3}$$

Segue que o raio de convergência é $R = 3$.

Note que para cada x no intervalo de convergência, a série determina uma função. Neste caso dizemos que a função é representada por uma série de potências.

Propriedades das séries de potências

- **Derivação termo a termo:** dada uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, com intervalo de convergência I. Suponha que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ para todo x no interior do intervalo I. Então, $f(x)$ tem derivada dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)(n-1)$$

- **Integração termo a termo:** como as hipóteses acima, $f(x)$ tem uma primitiva

$$\int \mathrm{f}(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x - x_0)(n+1)}{n+1}$$

Todas com o mesmo raio de convergência.

Construindo séries de potências de uma função dada

Existe uma maneira de obter a série de potências de uma função dada. O método é devido a Taylor e a MacLaurin.

Dada uma função $f(x)$ a série dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$, onde f_n denota a $n-$ésima derivada de f em $x = x_0$ é chamada de série de Taylor de f em torno do ponto $x = x_0$. Quando $x_0 = 0$, a série é chamada de MacLaurin.

Vamos ilustrar a convergência da série de Taylor para a função que lhe deu origem. Vamos ilustrar a convergência da série de Taylor de uma função limitada e definida sobre o intervalo (-1,1). Podemos escolher o número de termos da série e ver uma animação de como os termos da série que são gradualmente adicionadas aproximam cada vez mais a função.

```
> restart:
> with(plots):
> af:=(t,k)->Heaviside(t-k)*(t-k)-Heaviside(t-1-k)*(t-1-k);
```

$$af = (t,k) \to \text{ Heaviside }(t-k)(t-k) - \text{ Heaviside }(t-1-k)(t-1-k)$$

O número de termos da série de Taylor que consideramos é N=20.

```
> bf:=array(0..20);
```

$$bf = \text{array}(0\ldots 20, [])$$

Entre com a função $f(x)$ que deseja ver a aproximação.

```
> f:=x->cos(2*Pi*x);
```

$$f = x \to \cos(2\pi x)$$

```
> for i to 20 do bf[i]:=evalf(subs(x=0,diff(f(x),x$i))) od:
> ts:=(x,t)->1+sum(bf[n]/(n!)*af(t,n)*x^n,n=0..20);
```

$$ts = (x,t) \to 1 + \left(\sum_{n=0}^{20} \frac{bf_n \,\text{af}(t,n) x^n}{n!}\right)$$

Mudamos os valores ulim e llim para refletir a visão no eixo vertical.

```
> llim:=-2.5;
```

$$l\lim = -2.5$$

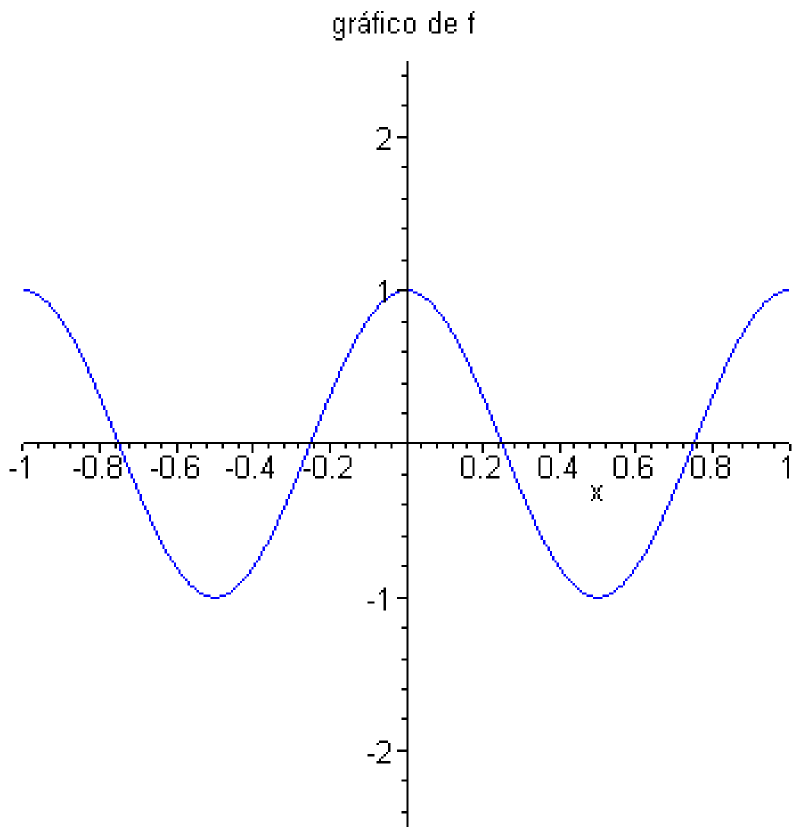
> ulim:=2.5;

$$u\lim := 2.5$$

Este comando constrói o gráfico de f.

> ff:=plot(f(x),x=-1..1,color=blue,title=`gráfico de f`):

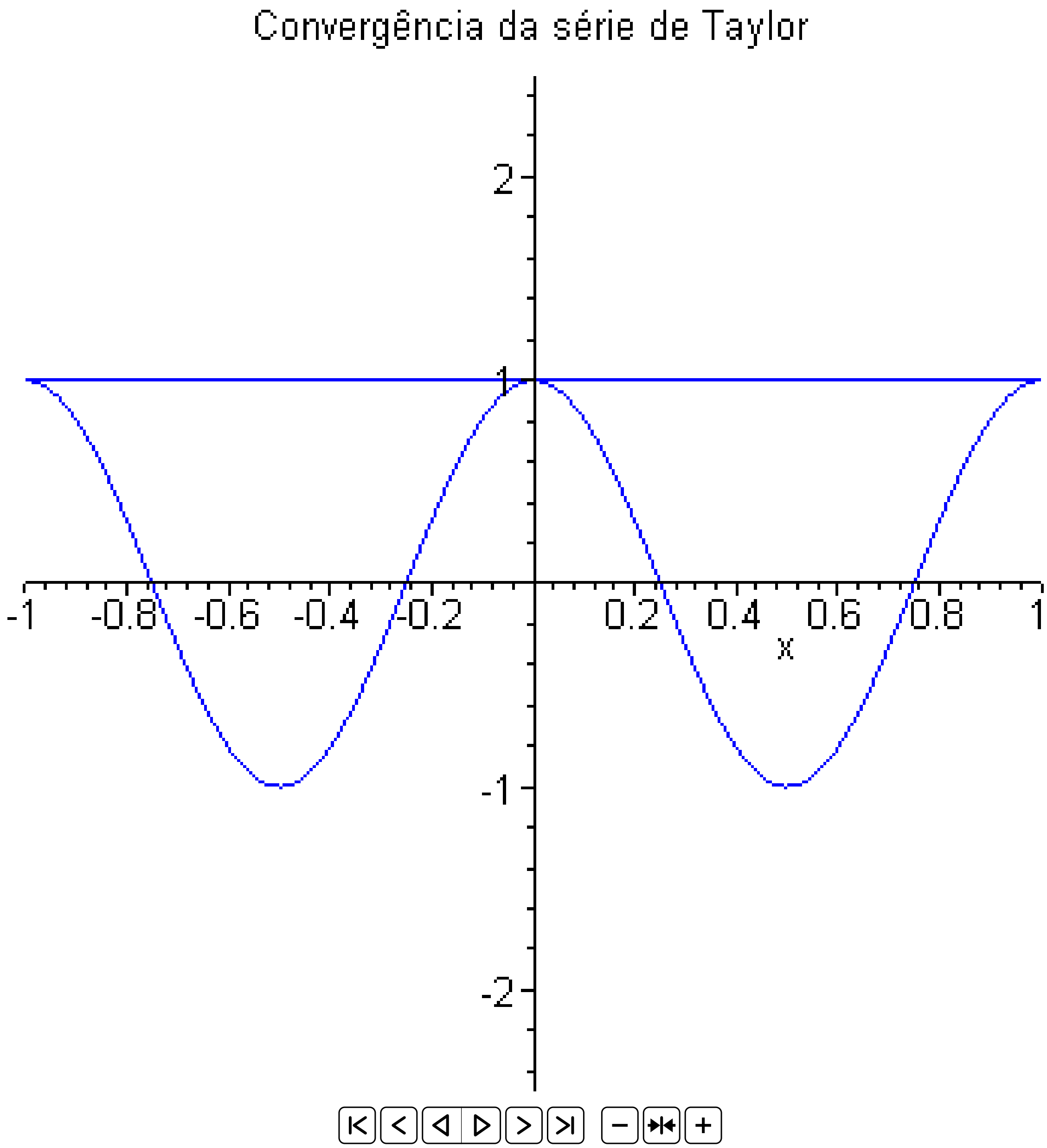
> subs(DEFAULT=llim..ulim,ff);



Este comando constrói a animação do gráfico da série e o gráfico de f juntos, ilustrando que o polinômio de Taylor aproxima a função.

> an:=animate(ts(x,t),f(x),x=-1..1,t=0..20,frames=60,numpoints=100,color=blue, title=`Convergência da série de Taylor`):

> subs(DEFAULT=llim..ulim,an);



Outro Exemplo

```
> restart:
> with(plots):
> g:=x->sin(2*Pi*x);
```

$$g = x \to \sin(2\pi x)$$

```
> ag:=(t,k)->Heaviside(t-k)*(t-k)-Heaviside(t-1-k)*(t-1-k);
```

$$ag = (t, k) \to \text{ Heaviside } (t-k)(t-k) - \text{ Heaviside } (t-1-k)(t-1-k)$$

```
> bg:=array(0..20);
```

$$bg = \text{array}(0 \ldots 20, [])$$

```
> for i to 20 do bg[i]:=evalf(subs(x=0,diff(g(x),x$i))) od:
> ts:=(x,t)->sum(bg[n]/(n!)*ag(t,n)*x^n,n=0..20);
```

$$ts := (x, t) \to \sum_{n=0}^{20} \frac{bg_n \, \text{ag}(t, n) x^n}{n!}$$

Mudamos os valores ulim e llim para refletir a visão no eixo vertical.

```
> llim:=-3.5;
```

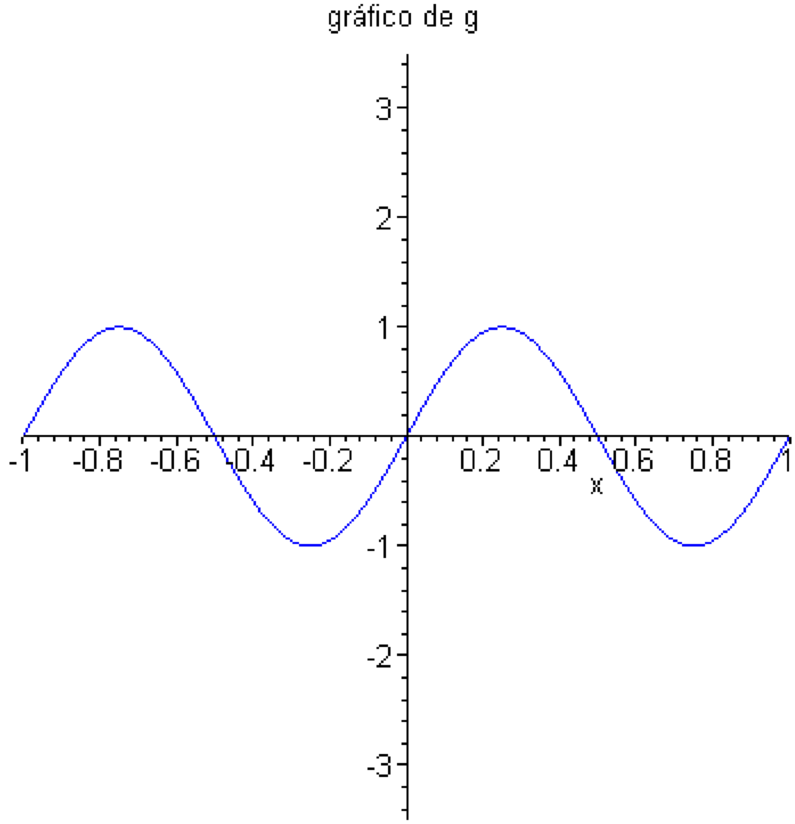
$$\text{lim} := -3.5$$

```
> ulim:=3.5;
```

$$uhm = 3.5$$

Este comando constrói o gráfico de f.

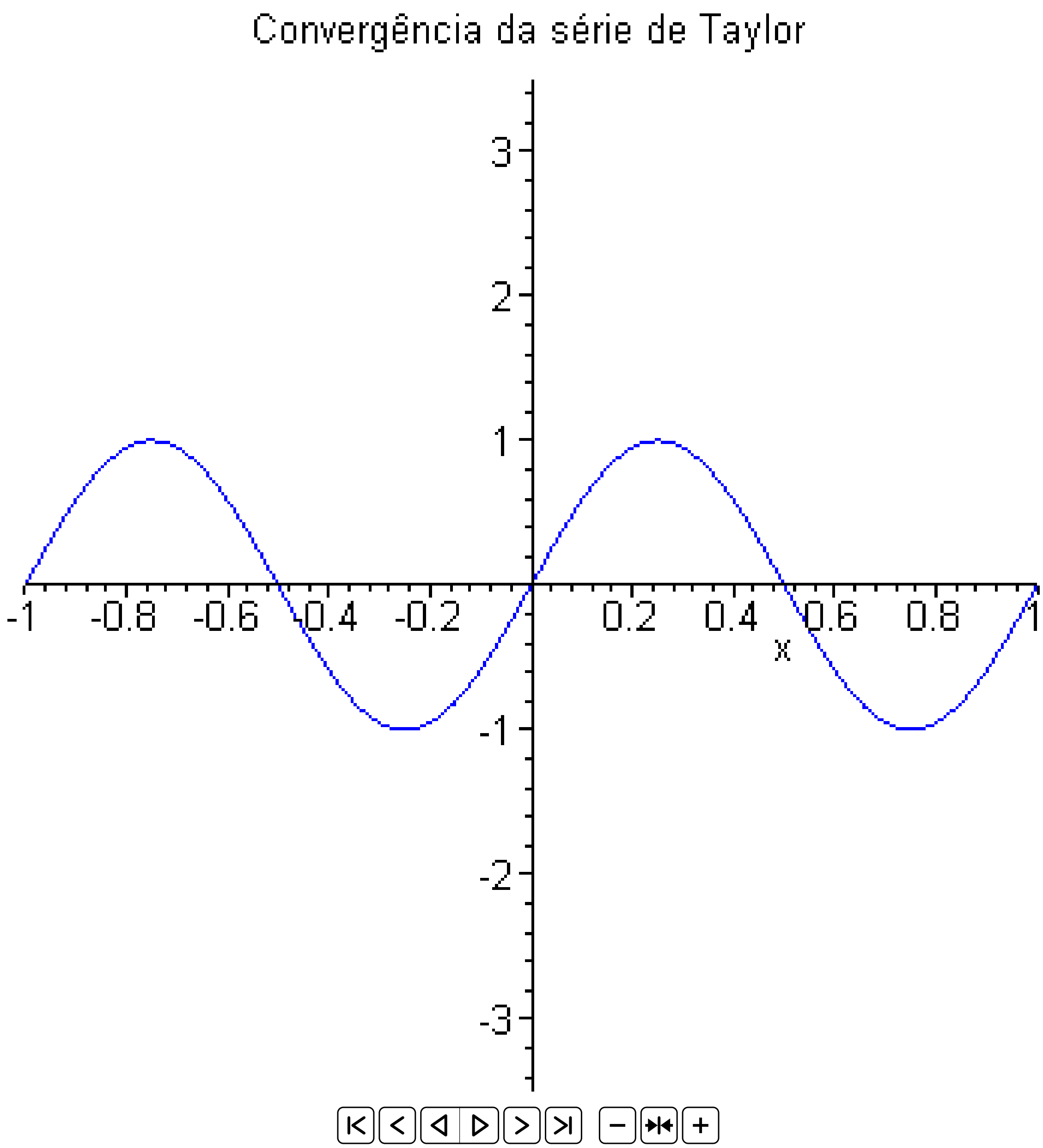
```
> gg:=plot(g(x),x=-1..1,color=blue,title=`gráfico de g`):
> subs(DEFAULT=llim..ulim,gg);
```



Este comando constrói a animação do gráfico da série e o gráfico de f juntos, ilustrando que o polinômio de Taylor aproxima a função.

```
> an:=animate(ts(x,t),g(x),x=-1..1,t=0..20,frames=60,numpoints=100,color=blue,
title=`Convergência da série de Taylor`):
```

```
> subs(DEFAULT=llim..ulim,an);
```


Convergência da série de Taylor
3
2
1
-1
-2
-3
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x